OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 19.02.2015

barem clasa a IX-a matematică-informatică

1. a) $|a-1|+|b-2| \geq |a-1+b-2| = 2$ 3p
   b) aplică proprietatea modulul sumei este mai mic sau egal cu suma modulelor........2p
   folosește ipoteza $x_1 + x_2 + ... + x_{2n} = 2n(n+1)$ 1p
   obține rezultatul....................1p

2. Se scade egalitatea dată din $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} = \frac{n+2}{2}\sqrt{a_{n+1}}$ obținută prin înlocuirea în relația dată pe *n* cu *n+1*....................2p
   Se obține $\sqrt{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n}\sqrt{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p
   Se calculează $a_2 = 4$ 1p
   Se demonstrează prin inducție că $a_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 3p

3. Se împarte ecuația cu $1+\{x\}$ și se obține $\{x\} + \frac{1}{1+\{x\}} = [1-\{x\}]$....................1p
   Din $1+\{x\} + \frac{1}{1+\{x\}} \geq 2 \Rightarrow \{x\} + \frac{1}{1+\{x\}} \geq 1$....................2p
   Din $1-\{x\} \leq 1 \Rightarrow [1-\{x\}] \leq 1$ 2p
   Egalitatea are loc pentru $[1-\{x\}] = 1$ sau $1+\{x\} = 1 \Rightarrow \{x\} = 0$ 1p
   Se obține soluția $x \in \mathbb{Z}$ 1p

4. a) Se observă că $ADA'E$ este romb (diagonalele sunt bisectoare şi sunt perpendiculare)....................1p
   $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MN}$, unde *N* este mijlocul laturii $[BC]$ 1p
   Dacă $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC}$ ar fi coliniar cu $\overrightarrow{AA'}$ atunci ar exista $\alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{MN} = \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AA'}$. Deoarece A, M, A' sunt coliniare , rezultă că $N \in AA'$, absurd...........1p
   b) Se aplică teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABC şi punctele coliniare D, E, F şi se ține seama că $AD = AE$ (romb)....................2p
   c) Se aplică teorema lui Thales pentru triunghiul ABC şi $A'D \parallel AC$, respectiv $A'E \parallel AB$, se înmulțesc relațiile şi se obține $\frac{BD}{BA} \cdot \frac{CA}{CE} = \frac{BA'}{CA'}$ 1p
   Se aplică teorema bisectoarei în triunghiul ABC, se obține $\frac{BA'}{CA'} = \frac{AB}{AC}$, de unde rezultă concluzia....................1p